Neher, M.

Lösungseinschließung beim endlichen inversen Sturm-Liouville-Problem

Das Sturm-Liouvillesche Eigenwertproblem

$$\begin{aligned} -u'' + q(x)\,u &= \lambda\,u \\ u(0) = u(\pi) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

mit einer stetigen Funktion $q(x)$ besitzt abzählbar viele Eigenwerte $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots$, und es gilt $\lambda_i \to \infty$ für $i \to \infty$ ([4], Seite 186). $\lambda_i(q)$ bezeichne im folgenden den zu $q(x)$ gehörenden i-ten Eigenwert von (1).

Betrachtet wird die folgende inverse Aufgabenstellung (inverses Eigenwertproblem): Gegeben sind paarweise verschiedene Zahlen ν_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, zu denen eine zur Intervallmitte von $[0, \pi]$ symmetrische, stetige Funktion $q(x)$ gesucht ist, so daß (1) die Eigenwerte $\lambda_i(q) = \nu_i$ für $i = 0, 1, \ldots, n$, besitzt.

Durch den Ansatz

$$q(x) \;=\; q(x;a) \;:=\; \widehat{q}(x) + \sum_{j=0}^{n} a_j\, q_j(x)$$

mit $a = (a_j) \in I\!R^{n+1}$ und stetigen, symmetrischen *Basisfunktionen* $\widehat{q}(x)$, $q_j(x)$, $j = 0, 1, \ldots, n$, ergibt sich die endlichdimensionale Aufgabenstellung, a so zu bestimmen, daß

$$\lambda_i(q(x;a)) \;=\; \nu_i \quad \text{für} \quad \mathrm{i = 0, 1, \ldots, n}$$

gilt. Setzt man $f = (f_i(a)) := (\lambda_i(q(x;a)) - \nu_i)$, so folgt aus [3, Theorem 2.3], daß f ist eine differenzierbare Funktion ist und die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f_i}{\partial a_j}(a) \;=\; \int_0^\pi q_j(x)\, g_i^2(x;a)\, dx, \quad i, j = 0, 1, \ldots, n,$$

mit den (in $L^2[0, \pi]$) normierten Eigenfunktionen $g_i(x;a)$ von $q(x;a)$ besitzt.

Wendet man das Newtonverfahren auf f an, so erhält man ein Rekonstruktionsverfahren für $q(x)$, da a genau dann eine Nullstelle von f ist, wenn $q(x;a)$ das inverse Eigenwertproblem löst. Um die Newton-Iteration

$$\left.\begin{aligned} a^{(k+1)} &:= a^{(k)} - \left(\tfrac{\partial f_i}{\partial a_j}(a^{(k)})\right)^{-1} f(a^{(k)}) \\ q^{(k)}(x) &:= q(x;a^{(k)}) \;=\; \widehat{q}(x) + \textstyle\sum_{j=0}^{n} a_j^{(k)}\, q_j(x) \end{aligned}\right\} \quad , \quad k = 0, 1, \ldots,$$

durchführen zu können, sind in jedem Schritt die Eigenwerte der Funktion $q^{(k)}(x)$ mit den zugehörigen normierten Eigenfunktionen zu bestimmen.

Lösungseinschließungen lassen sich erhalten, wenn man statt des gewöhnlichen Newtonverfahrens das Intervall-Newtonverfahren auf f anwendet. Es bezeichne $[a]$ ein $(n+1)$-dimensionales Intervall, $m([a])$ einen in $[a]$ enthaltenen Vektor, $(\frac{\partial f_i}{\partial a_j}([a]))$ eine Intervallmatrix, die die Funktionalmatrizen $(\frac{\partial f_i}{\partial a_j}(a))$ aller $a \in [a]$ enthält, und $\mathrm{IGA([A],[b])}$ die Anwendung des Intervall-Gaußalgorithmus ([1], Kap. 15) auf das Intervall-Gleichungssystem mit Intervallmatrix $[A]$ und rechter Seite $[b]$. Gilt dann für den Intervall-Newtonoperator

$$\mathrm{IN}([a]) \;:=\; m([a]) - \mathrm{IGA}\Big(\Big(\frac{\partial f_i}{\partial a_j}([a])\Big),\, f(m([a]))\Big)$$

die Inklusion $\mathrm{IN}([a]) \subseteq [a]$, so enthält $\mathrm{IN}([a])$ nach dem Fixpunktsatz von Brouwer eine Lösung des inversen Eigenwertproblems.

Zur Durchführung des Intervall-Newtonschritts werden neben den Eigenwerten von $q(x; m([a]))$ auch Einschließungen der partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial a_j}(a)$ aller $a \in [a]$ benötigt. Geeignete Einschließungen lassen sich mit den Verfahren aus [2] folgendermaßen bestimmen:

Zuerst wird eine Einschließung $[\lambda_i]$ der i-ten Eigenwerte aller $q(x;a)$ mit $a \in [a]$ berechnet. Danach werden für alle $a \in [a]$, $\lambda_i \in [\lambda_i]$ die Anfangswertprobleme

$$-u_i \;+\; q(x;a)\, u_i = \lambda_i\, u_i$$

$$u_i(0) \;=\; 0, \quad u_i'(0) \;=\; 1$$

gelöst und in der Intervallfunktion $[u_i](x)$ eingeschlossen. Nach der Normierung

$$g_i(x;[a]) \;:=\; \frac{[u_i](x)}{\|[u_i]\|_2}$$

erhält man Einschließungen der benötigten partiellen Ableitungen aus

$$\frac{\partial f_i}{\partial a_j}([a]) \;\subseteq\; \int_0^\pi q_j(x)\, g_i(x;[a])\, dx.$$

Bei der praktischen Berechnung von Einschließungen auf dem Computer sind die auftretenden Darstellungs-, Diskretisierungs- und Rundungsfehler gesondert zu berücksichtigen. Um den damit verbundenen Aufwand gering zu halten, wird bei der Rekonstruktion von $q(x)$ zunächst mit dem reellen Newtonverfahren eine Näherungslösung $\tilde{q}(x) = q(x;\tilde{a})$ berechnet und um diese ein Funktionenschlauch $[q]^{(0)}(x) = q(x;[a]^{(0)})$ gelegt, in dem eine Lösung vermutet wird.

Führt man nun das Intervall-Newtonverfahren mit Startwert $[q]^{(0)}(x)$ auf dem Rechner unter Einschließung der oben genannten Fehler durch, so ist im Fall der Inklusion die Existenz und Einschließung einer Lösung garantiert. Die Fehlererfassung kann dabei durch die Verwendung einer Intervall-Arithmetik, wie sie von PASCAL-XSC oder ähnlichen Programmiersprachen bereitgestellt wird, gewährleistet werden.

Beispiel 1: Rekonstruktion von $q(x) = 100(\frac{2}{\pi}x - 1)^2$ aus vier Eigenwerten

Vorgegebene Eigenwerte (je 16 dezimale Mantissenstellen):

$\nu_0 = 6.366\ldots,\;\; \nu_1 = 19.098\ldots,\;\; \nu_2 = 31.834\ldots,\;\; \nu_3 = 44.590\ldots$

Ansatz für $q(x)$: Symmetrischer, kubischer Spline mit acht Stützstellen, $x_i = i\pi/7$, $i = 0, 1, \ldots, 7$.
$q_j(x_i) = q_j(x_{7-i}) = \delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1, 2, 3.$

Startnäherung: $q^{(0)}(x) = 0.$

Einschließungen in x_i:

$[q](0) = {}^{100.000\;000\;000\;149\;30}_{\;99.999\;999\;999\;851\;92}$, $[q](\pi/7) = 51.020\;408\;163\;2^{75\;49}_{55\;22}$, $[q](2\pi/7) = 18.367\;346\;938\;77^{6\;28}_{4\;75}$,
$[q](3\pi/7) = 2.040\;816\;326\;530\;{}^{82}_{41}$.

Beispiel 2: Rekonstruktion von $q(x) = 100\cos(10x)$ aus sechs Eigenwerten

Vorgegebene Eigenwerte (je 16 dezimale Mantissenstellen):

$\nu_0 = -37.575\ldots,\;\; \nu_1 = -36.840\ldots,\;\; \nu_2 = -35.890\ldots,\;\; \nu_3 = -35.084\ldots,\;\; \nu_4 = -34.766\ldots,\;\; \nu_5 = 61.476\ldots$

Ansatz für $q(x)$: $q(x) = a_0 + \sum_{j=1}^5 a_j \cos(2jx)$.

Startnäherung: $q^{(0)}(x) = 99\cos(10x)$.

Einschließung:
$$\begin{aligned}[q](x) = 100\cos(10x) &+ [-2.491\cdot 10^{-09}, 2.481\cdot 10^{-09}] + [-6.317\cdot 10^{-09}, 6.293\cdot 10^{-09}]\cos(2x)\\ &+ [-6.258\cdot 10^{-09}, 6.240\cdot 10^{-09}]\cos(4x) + [-6.842\cdot 10^{-09}, 6.824\cdot 10^{-09}]\cos(6x)\\ &+ [-8.114\cdot 10^{-09}, 8.085\cdot 10^{-09}]\cos(8x) + [-3.647\cdot 10^{-09}, 3.634\cdot 10^{-09}]\cos(10x).\end{aligned}$$

Literatur

[1] Alefeld, G. und Herzberger, J.: *Introduction to Interval Computations.* Academic Press, New York, 1983.

[2] Neher, M.: *Inclusion of Eigenvalues and Eigenfunctions of the Sturm-Liouville Problem.* In Atanassova, L., Herzberger, J. (eds.): *Computer Arithmetic and Enclosure Methods.* Proceedings of SCAN-91, Elsevier, Amsterdam, 1992.

[3] Pöschel, J. und Trubowitz, E.: *Inverse Spectral Theory.* Academic Press, Orlando, 1987.

[4] Walter, W.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Springer-Verlag, Berlin, 4. Auflage, 1990.

Anschrift: Dipl.-Math. techn. M. Neher, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Karlsruhe,
Postfach 6980, 76128 Karlsruhe, Deutschland