

# Ein multivariates Approximationsproblem bei einer Parameterstudie zur Standsicherheit von Flussdeichen

Ingo Eble und Markus Neher

**Abstract.** Die Standsicherheit eines Flussdeichs kann durch eine skalare Druckfunktion beschrieben werden, deren Funktionswerte von verschiedenen Deichparametern abhängen. Die Berechnung der Funktionswerte mit Finite-Elemente-Verfahren ist allerdings so aufwendig, dass eine Stabilitätsanalyse durch Parametervariation mit heutigen Computern nicht möglich ist.

Um eine Parametervariation zu ermöglichen, werden in dieser Arbeit mit verschiedenen Approximationsverfahren leicht auszuwertende Näherungsformeln für die Druckfunktion berechnet. Da die exakte Druckfunktion nicht bekannt ist, wird die Güte der Approximation an Hand von geeignet gewählten Prüfknoten näherungsweise bestimmt.

## Einleitung

Die Häufung von Hochwasserfällen in den letzten Jahren und die damit verbundenen Schäden haben gezeigt, dass Untersuchungen der Stabilität von Flussdeichen eine immer größere Bedeutung zukommt. Aus Aufwands- und Kostengründen werden numerische Berechnungsverfahren dabei immer wichtiger.

Die Stabilität eines Deichs lässt sich durch die sogenannte Druckfunktion als skalare Funktion der verschiedenen Deichparameter modellieren [5]. Zur Berechnung dieser Druckfunktion werden üblicherweise Finite-Elemente-Verfahren eingesetzt. Diese Verfahren sind jedoch sehr rechenzeitintensiv. Die Berechnung eines einzelnen Funktionswerts der Druckfunktion benötigt mit der heute zur Verfügung stehenden Hard- und Software ca. eine Stunde, falls dabei ein neues FE-Netz generiert werden muss. Da selbst geringfügige Änderungen der Deichgeometrie neue FE-Netze und somit umfangreiche Neuberechnungen erfordern, ist eine Sensitivitätsanalyse der Stabilität durch Variation der Deichparameter mit FE-Programmen praktisch unmöglich.

Im Rahmen einer Diplomarbeit [2] sollte daher eine leicht auszuwertende Näherungsformel für die Druckfunktion entwickelt werden. Der vorliegende Bericht stellt eine Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse dieser Diplomarbeit dar.

In Abschnitt 1 wird zunächst die mathematische Problemstellung vorgestellt. Ausgehend von Funktionswerten, die von einer Ingenieurgesellschaft bereitgestellt wurden, werden anschließend mit verschiedenen numerischen Verfahren multivariate Funktionen konstruiert, um die Druckfunktion auf dem gesamten in der Praxis bedeutsamen Definitionsbereich zu approximieren. Die Lage der vorgegebenen Daten wird dabei mit Hilfe von zweidimensionalen Plots veranschaulicht. Nach der Präsentation der numerischen Ergebnisse wird im letzten Abschnitt der Approximationsfehler der berechneten Näherungsfunktionen diskutiert.

# 1 Mathematische Aufgabenstellung

Betrachtet wurde die folgende mathematische Problemstellung:

- Gegeben sind Funktionswerte der Druckfunktion  $f$  von 5 Veränderlichen. Die durch Finite-Elemente-Verfahren mit kommerzieller Software berechneten Funktionswerte wurden von einer Ingenieurgesellschaft zur Verfügung gestellt.

Die Variablen beschreiben Geometrie und Materialeigenschaften des Deichs:

$$\frac{h_F}{H} = f\left(\frac{L_V}{d_2}, \frac{L_D}{d_1}, \frac{d_1}{d_2}, \frac{k_1}{k_2}, \frac{k_3}{k_2}\right)$$

mit

$h_F$ :	Druckwert am landseitigen Deichfuß unter der Lehmdecke
$H$ :	Einstauhöhe
$L_V$ :	Vorlandlänge
$L_D$ :	Breite der Deichbasis
$d_1$ :	Dicke der Lehmdecke
$d_2$ :	Aquifermächtigkeit
$k_1, k_2, k_3$ :	Wasserdurchlässigkeitsbeiwerte bei Sättigung

wobei  $\frac{L_V}{d_2} \in [0.1, 50]$ ,  $\frac{L_D}{d_1} \in [10, 50]$ ,  $\frac{d_1}{d_2} \in [0.05, 0.5]$ ,  $\frac{k_1}{k_2}, \frac{k_3}{k_2} \in [0.000001, 10]$ .

Die Definitionsintervalle der einzelnen Parameter wurden von der beteiligten Ingenieurgesellschaft festgelegt.

- Gesucht ist eine Näherungsformel für  $\frac{h_F}{H}$ , die die FE-Berechnungen ersetzen soll.

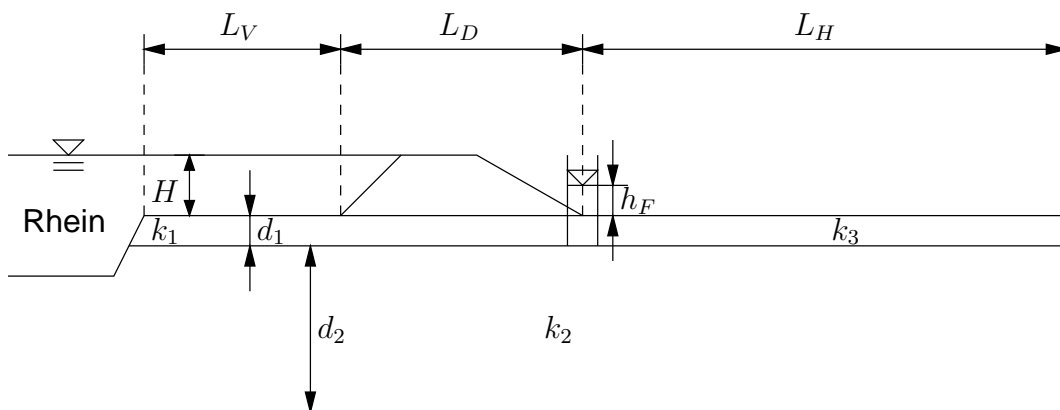


Abbildung 1: Deichaufbau

Im Ansatz der Funktion  $f$  wurde die Dimensionsanalyse [3] benutzt, um zwei der sieben physikalischen Größen  $L_V$ ,  $L_D$ ,  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  zu eliminieren. Außerdem wurde eine weitere

Variable, die Hinterlandlänge des Deichs, unterschlagen. Wie sich in Testrechnungen zeigte, hängt der Druckwert durchaus von der Hinterlandlänge ab, wenn man diese frei variieren lässt. Allerdings darf für praktisch relevante Deiche ein konstantes Verhältnis der Hinterlandlänge zur Aquifermächtigkeit angenommen werden. Da das Approximationsproblem bereits in fünf Dimensionen außerordentlich aufwendig ist, wurde von dieser Möglichkeit Gebrauch gemacht und für die Hinterlandlänge die hundertfache Aquifermächtigkeit angenommen.

## 2 Approximationsansätze

Vor der eigentlichen Approximation wurde zunächst der Definitionsbereich von  $f$  in den fünf-dimensionalen Würfel  $[-1, 1]^5$  transformiert. Auf Grund physikalischer Überlegungen wurden die Definitionsintervalle der vierten und fünften Variablen dabei logarithmisch transformiert. Mit verschiedenen numerischen Verfahren wurde anschließend die folgende Funktion  $g$  approximiert:

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) := f\left(\frac{L_V}{d_2}, \frac{L_D}{d_1}, \frac{d_1}{d_2}, \frac{k_1}{k_2}, \frac{k_3}{k_2}\right)$$

mit

$$\begin{aligned} x_1 &= \left(\frac{L_V}{d_2} - 25.05\right)/24.95, & x_1 &\in [-1, 1], \\ x_2 &= \left(\frac{L_D}{d_1} - 30\right)/20, & x_2 &\in [-1, 1], \\ x_3 &= \left(\frac{d_1}{d_2} - 0.2525\right)/0.2475, & x_3 &\in [-1, 1], \\ x_4 &= \left(\lg\left(\frac{k_1}{k_2}\right) + 2.5\right)/3.5, & x_4 &\in [-1, 1], \\ x_5 &= \left(\lg\left(\frac{k_3}{k_2}\right) + 2.5\right)/3.5, & x_5 &\in [-1, 1]. \end{aligned}$$

Die Berechnung von Funktionswerten von  $g$  erforderte für jede Wahl der ersten drei Variablen  $x_1, x_2, x_3$  ein eigenes FE-Netz. Für jede Netzgenerierung benötigte ein erfahrener Ingenieur ca. eine Stunde. Die Werte von  $x_4$  und  $x_5$  konnten hingegen mit einem sehr viel geringeren Aufwand variiert werden. Daher wurde zunächst versucht, die Funktionswerte nur auf einem Gitter bereitzustellen, das in den ersten drei Variablen halbiert und in den letzten beiden Variablen geviertelt wurde, wodurch sich  $3^3 \cdot 5^2 = 675$  Gitterpunkte ergaben.

Leider zeigte sich durch Testrechnungen an Prüfknoten, dass die mit diesem Gitter konstruierten Approximationen nicht genau genug waren. Daher wurden die Funktionswerte von  $g$  trotz des immensen Aufwands auch auf einem regelmäßigen Gitter mit 3125 Knoten, bei dem der Definitionsbereich von  $g$  in allen fünf Variablen geviertelt wurde, ermittelt.

Auf jedem der Gitter wurden die folgenden Approximationsfunktionen  $p_A, p_R, p_S$  berechnet:

- $p_A$ : Ausgleichspolynome nach der Methode der kleinsten Quadrate [1],
- $p_R$ : Radiale Basisfunktionen [6, 7, 8],
- $p_S$ : Multilinearer Spline [4].

Die Approximation nach der Methode der kleinsten Quadrate war das aufwendigste der getesteten Verfahren, sie führte aber auch zu den besten Resultaten. Um die von der Ingenieurgesellschaft gewünschten Genauigkeitsanforderungen zu erfüllen, wurden unterschiedliche Nebenbedingungen verwendet.

Konstruktionsbedingt liegen die Funktionswerte der Druckfunktion im Intervall  $[0, 1]$ . Der Funktionswert entspricht dem am landseitigen Deichfuß erwarteten Druck im Verhältnis zur Einstauhöhe. Um diesem Druck zu begegnen, d.h. um den Deichfuß gegen Auftrieb, hydraulischen Grundbruch und gegen Abgleiten des landseitigen Deichbereichs zu sichern, wird häufig eine Berme mit flacher Böschungsneigung aufgeschüttet (siehe Abbildung 2). Die erforderliche Bermenhöhe berechnet sich unmittelbar aus dem Funktionswert von  $f$ , multipliziert mit der Einstauhöhe  $H$ .

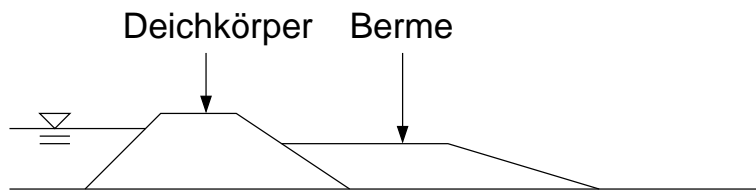


Abbildung 2: Deich mit Berme

Da die Bermenhöhe einen beträchtlichen Kostenfaktor darstellt, ist man an einer möglichst präzisen Bestimmung des Druckwerts interessiert. Aus Sicherheitsgründen wird dabei folgendermaßen vorgegangen:

- Sehr kleine Funktionswerte von  $f$  werden nicht besonders genau benötigt, da für jede Berme eine Mindesthöhe aufgeschüttet wird.
- Treten Funktionswerte nahe bei 1 auf, wird eine Berme mit voller Einstauhöhe aufgeschüttet. Bei der Approximation ist darauf zu achten, dass große Funktionswerte möglichst wenig unterschätzt werden, während zu große Näherungswerte von untergeordneter Bedeutung sind.
- Funktionswerte zwischen 0.3 und 0.9 sollten möglichst genau approximiert werden.

Diese Genauigkeitsanforderungen wurden mathematisch präzisiert und wie in Tabelle 1 angegeben als Nebenbedingungen bei der Methode der kleinsten Quadrate verwendet:

Funktionswert	Genauigkeit
$f(x) < 0.1$	max. absoluter Fehler von 0.02
$0.1 \leq f(x) < 0.3$	der max. relativer Fehler soll linear von 20% auf 5% fallen
$0.3 \leq f(x) \leq 1$	max. relativer Fehler von 5%

Tabelle 1: Erwünschte Genauigkeit der Approximation.

Bei den anderen beiden untersuchten Approximationsverfahren wurden die vorgegebenen Funktionswerte interpoliert, an den Gitterpunkten also exakt angenommen, so dass sich Nebenbedingungen erübrigten.

Die getesteten radialen Basisfunktionen ergaben teilweise gute lokale Approximationen, der Fehler in der Maximumnorm war aber größer als beim Ausgleichspolynom. Die den radialen Basisfunktionen in der Literatur häufig zugeschriebenen exzellenten Approximationseigenschaften konnten bei dieser Anwendung nicht bestätigt werden.

Ohne nennenswerten numerischen Aufwand konnte der multilineare Spline aus den bereitgestellten Funktionswerten konstruiert werden. Er wurde hauptsächlich verwendet, um die Lage der Funktionswerte durch Plots von zweidimensionalen Schnitten des Definitionsbereichs zu veranschaulichen. Hierdurch konnte die Auswirkungen der Variation einzelner Parameter auf den Funktionswert der Druckfunktion besonders einfach und gut visualisiert werden.

### **3 Ausgewählte Plots der quintlinearen Splines**

Die Lage der vorgegebenen Daten zur Druckfunktion wird im Folgenden mit Hilfe von ausgewählten zweidimensionalen Plots dargestellt. Wie die Plots zeigen, können zweidimensionale Schnitte der fünfdimensionalen Druckfunktion recht unterschiedliche Gestalt besitzen. Die Schwierigkeit einer guten Polynomapproximation auf den gegebenen groben Gittern wird dadurch offensichtlich.

Andererseits lassen die erhaltenen Plots den Schluss zu, dass die zu approximierende Druckfunktion hinreichend glatt ist, so dass man mit den getesteten Methoden auf feineren Gittern bessere Approximationsfunktionen erhalten sollte.

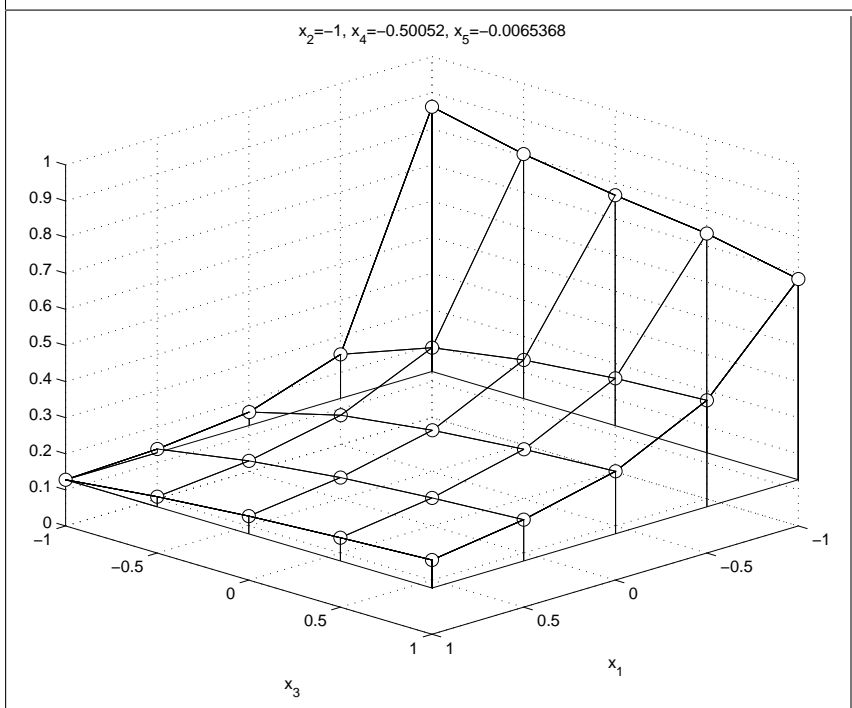
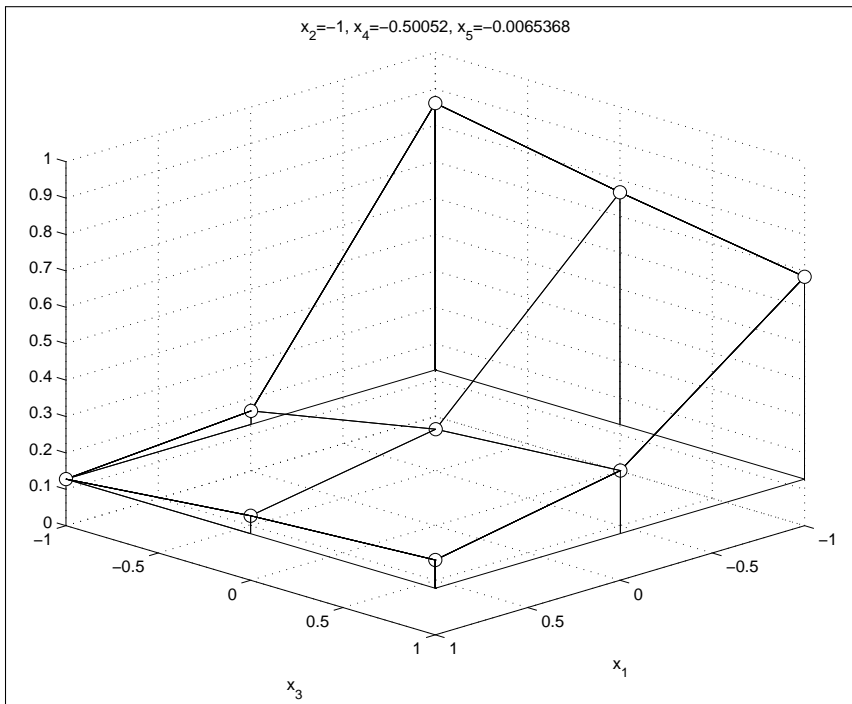


Abbildung 3

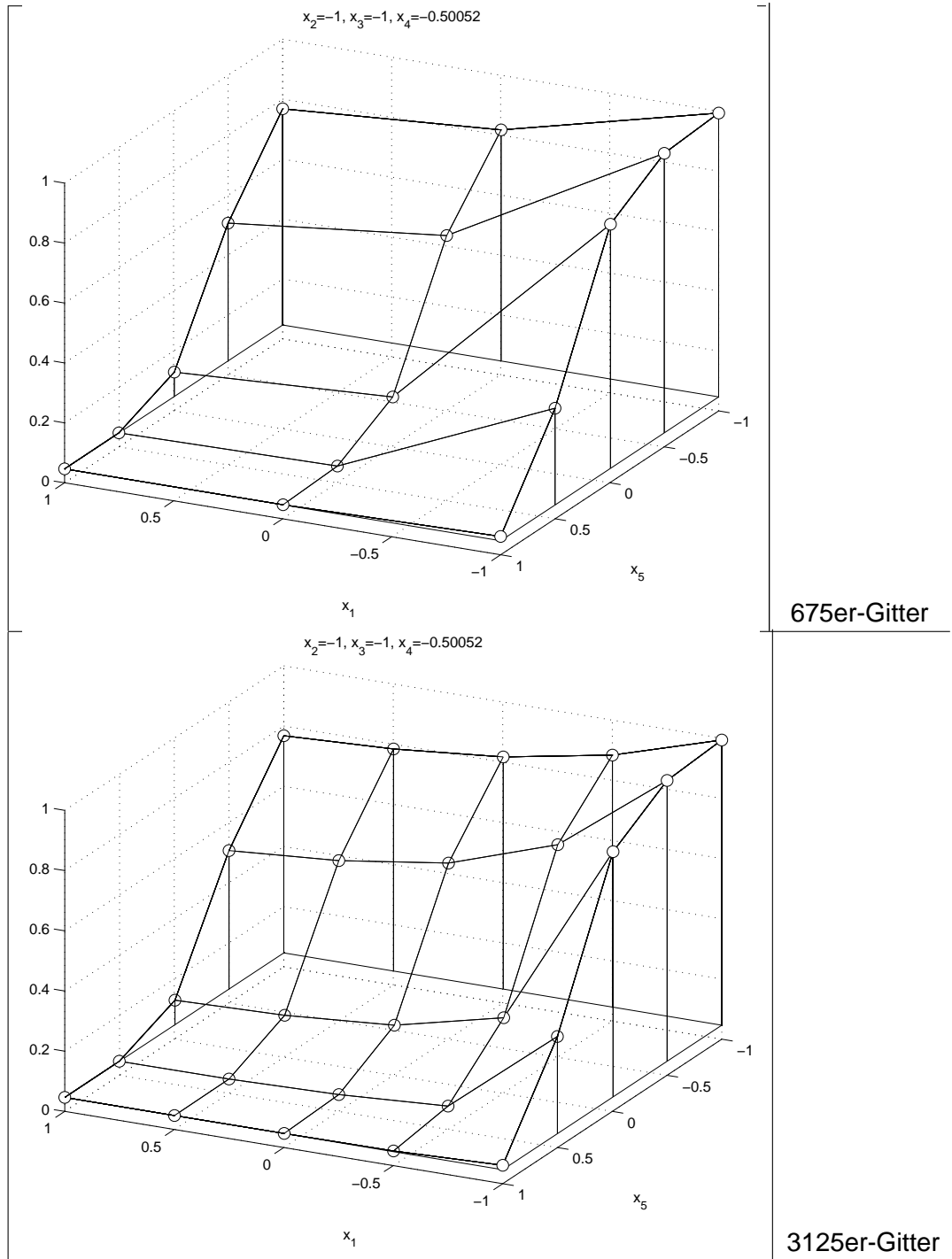
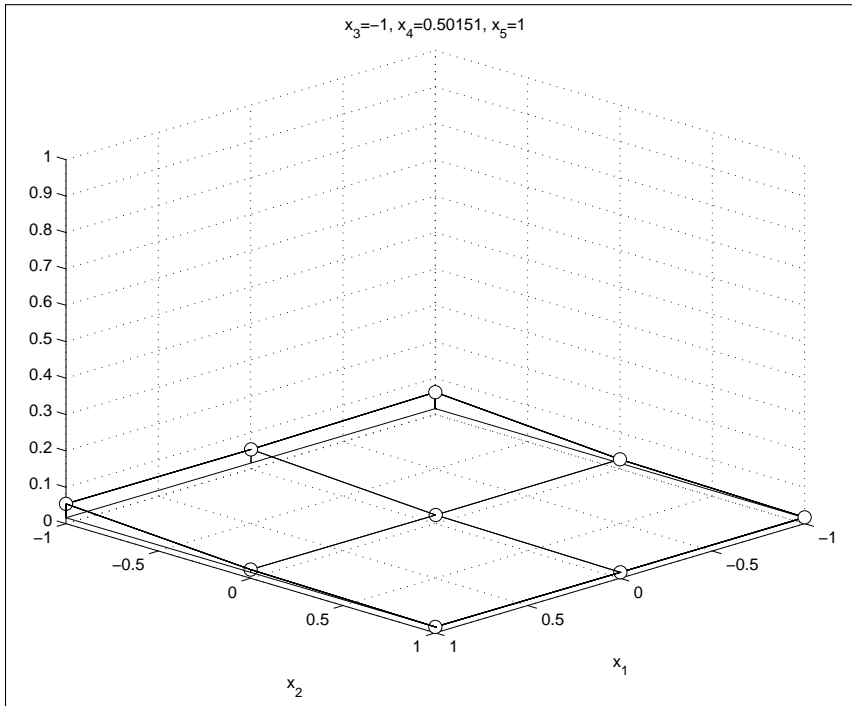
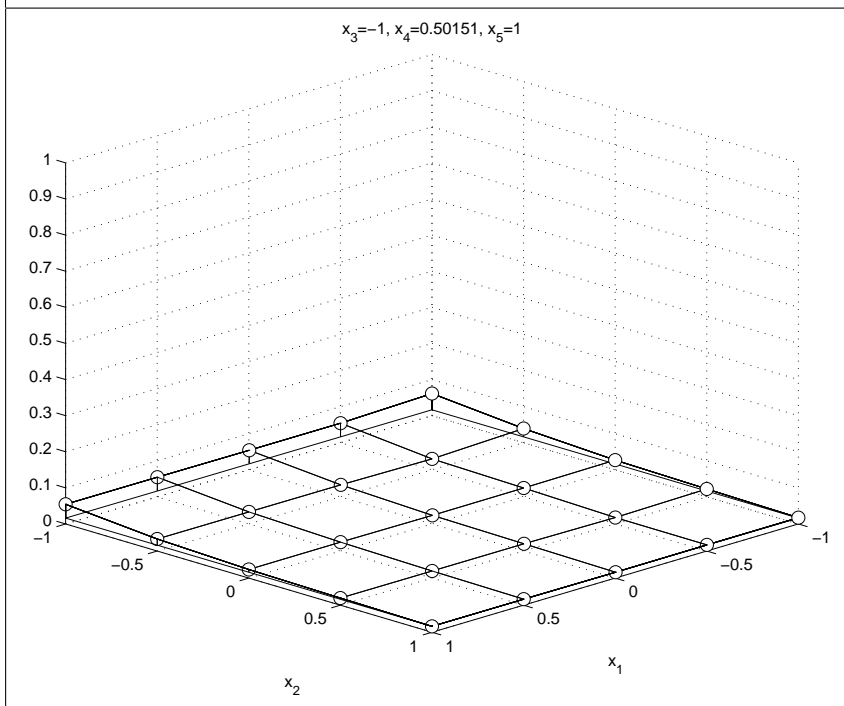


Abbildung 4



675er-Gitter



3125er-Gitter

Abbildung 5

## 4 Numerische Ergebnisse

Die Approximationsalgorithmen wurden in Matlab implementiert. Da in Matlab umfangreiche Matrix-Vektor-Prozeduren (insbesondere auch zum Lösen linearer Gleichungssysteme) zur Verfügung stehen, ließ sich die Programmierung der Algorithmen wesentlich schneller bewerkstelligen als dies mit Programmiersprachen wie C oder Fortran der Fall gewesen wäre. Im Wesentlichen neu zu programmieren waren Prozeduren zur Erstellung der linearen Gleichungssysteme, mit denen sich die jeweiligen Approximationsverfahren beschreiben lassen, sowie Prozeduren zur Auswertung der berechneten Näherungsfunktionen.

Da die exakte Druckfunktion nicht bekannt ist, konnte die Güte der Approximation nur an Hand von Prüfknoten näherungsweise bestimmt werden. Zu den vorgegebenen Daten wurden die Prüfknoten so gewählt, dass an diesen Stellen die größten Approximationsfehler zu erwarten waren. Es wurden insgesamt 160 Prüfknoten mit den folgenden Koordinaten verwendet:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4, x_5 \in$
-0.75	-0.75	-0.75	{ -0.75, -0.25, 0.25, 0.75 }
-0.75	-0.25	-0.75	
-0.75	-0.75	-0.25	
-0.25	-0.75	-0.75	
-0.25	-0.25	-0.25	
-0.75	-0.75	0.75	
-0.75	0.25	0.25	
0.25	0.75	0.75	
0.75	-0.25	-0.25	
0.25	-0.75	-0.75	

Tabelle 2: Koordinaten der Prüfknoten.

Tabelle 3 zeigt die Fehler an den Prüfknoten für einige ausgewählte Approximationen bezüglich des 675er-Gitters. Mit "Ausgleichspolynom" wird die polynomiale Ansatzfunktion mit  $\gamma = 6, (2, 2, 2, 4, 4)$  (vgl. [2, S. 98]) bezeichnet, welche mit der Methode der Ausgleichsrechnung an die Genauigkeitsanforderungen aus Tabelle 1 angepasst wurde. Mit "RBF" wird die Interpolante "Multiquadrics" mit  $\nu = 1, c = 1.2$  (vgl. [2, S. 54ff und S. 85]) bezeichnet, welche mit der Methode der Interpolation mit radialen Basisfunktionen bestimmt wurde. "Spline" bezeichnet den quintlinearen Spline.

Näherung	max. relativer Fehler an den Prüfknoten mit				max. absoluter Fehler an den Prüfknoten mit	
	$f(x) \geq 0.3$		$0.3 > f(x) \geq 0.1$		$0.1 > f(x)$	
	$x_1 < 0$	$x_1 > 0$	$x_1 < 0$	$x_1 > 0$	$x_1 < 0$	$x_1 > 0$
Ausgleichspolynom	0.3815	0.2466	0.8788	0.0954	0.0517	0.0694
RBF	0.4595	0.4186	1.1154	0.4808	0.0431	0.1152
Spline	0.4334	0.1503	1.1693	0.6739	0.0936	0.0556

Tabelle 3: Fehler der Näherungslösungen bezüglich des 675er-Gitters an den Prüfknoten.

Tabelle 4 zeigt die Fehler an den Prüfknoten für einige ausgewählte Approximationen bezüglich des 3125er-Gitters. Mit "Ausgleichspolynom" wird hier die polynomiale Ansatzfunktion mit  $\gamma = 7, (4, 4, 4, 4, 4)$  (vgl. [2, S. 98]) bezeichnet, welche ebenfalls mit der Methode der Ausgleichsrechnung an die Forderungen aus Tabelle 1 angepasst wurde. "RBF" und "Spline" werden wie oben verwendet.

Näherung	max. relativer Fehler an den Prüfknoten mit				max. absoluter Fehler an den Prüfknoten mit	
	$f(x) \geq 0.3$		$0.3 > f(x) \geq 0.1$		$0.1 > f(x)$	
	$x_1 < 0$	$x_1 > 0$	$x_1 < 0$	$x_1 > 0$	$x_1 < 0$	$x_1 > 0$
Ausgleichspolynom	0.1523	0.1487	0.3883	0.2739	0.0458	0.0521
RBF	0.1867	0.102	0.4329	0.2653	0.031	0.0281
Spline	0.2871	0.1092	0.7617	0.6752	0.0677	0.0491

Tabelle 4: Fehler der Näherungslösungen bezüglich des 3125er-Gitters an den Prüfknoten.

## 5 Verteilung der Approximationsfehler

Die Abbildungen 6, 7 und 8 zeigen die Fehlerverteilungen der in Tabelle 4 aufgeführten Näherungen an den Prüfknoten. Das Vorzeichen des absoluten Fehlers ist dabei besonders zu berücksichtigen, wenn die landseitige Berme eines Hochwasserdamms auf Grund der berechneten Werte angelegt wird.

Zu kleine Funktionswerte der Näherungsfunktion unterschätzen den anfallenden Druck und somit die benötigte Bermenhöhe. Im schlimmsten Fall kann dies bei Hochwasser zum Deichbruch führen und muss daher bei der Bemessung der Bermenhöhe unbedingt vermieden werden. Umgekehrt überschätzen zu große Funktionswerte die notwendige Berme. Obwohl damit Mehrkosten verbunden sind, ist dieser Fall in der Praxis weniger kritisch.

Wie aus Abbildung 6 ersichtlich ist, wird die Druckfunktion durch das Ausgleichspolynom  $p_A$  an den Prüfknoten des 3125er-Gitters um höchstens 0,05 unterschätzt. Fügt man zu  $p_A$  einen konstanten Sicherheitszuschlag in dieser Höhe hinzu, liegt der durch  $p_A$  berechnete Näherungswert an allen Gitterpunkten und den Prüfknoten über dem am Deich zu erwartenden Druck.

Die von der beteiligten Ingenieurgesellschaft gewünschten Genauigkeitsanforderungen aus Tabelle 1 konnten leider mit keinem der getesteten Ansätze zur Approximation der Daten erreicht werden. Dies liegt vor allem daran, dass im Verhältnis zum sehr großen Definitionsbereich von  $f$  nur wenige Funktionswerte zur Verfügung stehen.

Die berechneten Funktionswerte deuten darauf hin, dass die Druckfunktion hinreichend glatt ist und dass nach erneuter Halbierung der Schrittweite des Gitters eine signifikante Verbesserung der Approximationsgüte erwartet werden darf. Die Berechnung der Funktionswerte auf dem halbierten Gitter würde jedoch den bisherigen Aufwand ungefähr verdreifachen, was die praktische Durchführung unmöglich macht.

Andererseits sind bei Berechnungen in der Praxis die exakten Deichparameter nicht bekannt. Sie können häufig nur grob geschätzt werden, so dass ohnehin große Verfahrensfehler in die Rechnung eingehen. Die mit der Approximation nach der Methode der kleinsten Quadrate erhaltene Näherungsformel gibt daher nach Einschätzung der Autoren ein realistisches Bild der Druckfunktion wieder, das mit den vorliegenden Informationen über  $f$  nicht wesentlich verbessert werden kann.

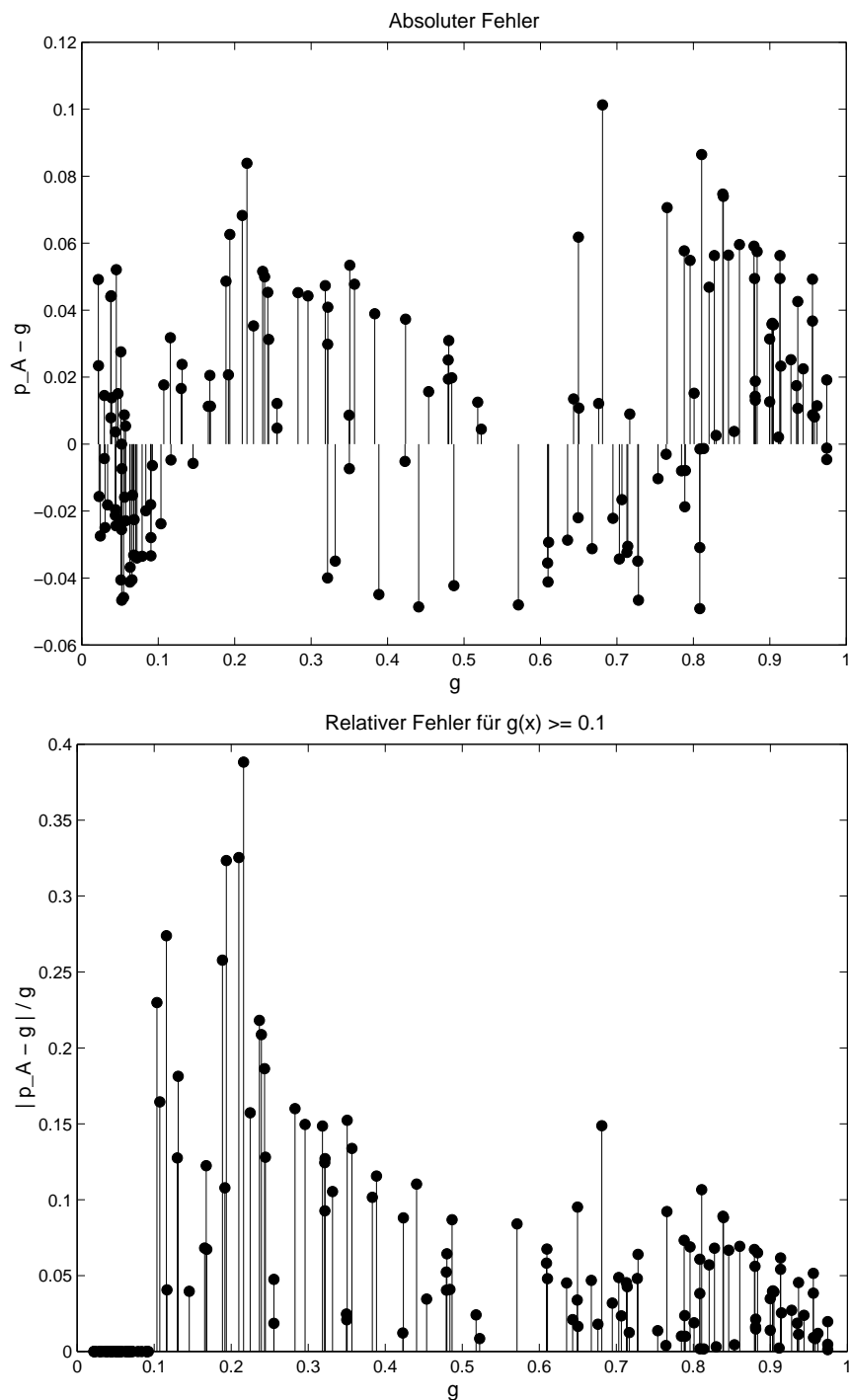


Abbildung 6: Absoluter und relativer Fehler des Ausgleichspolynoms an den Prüfknoten.

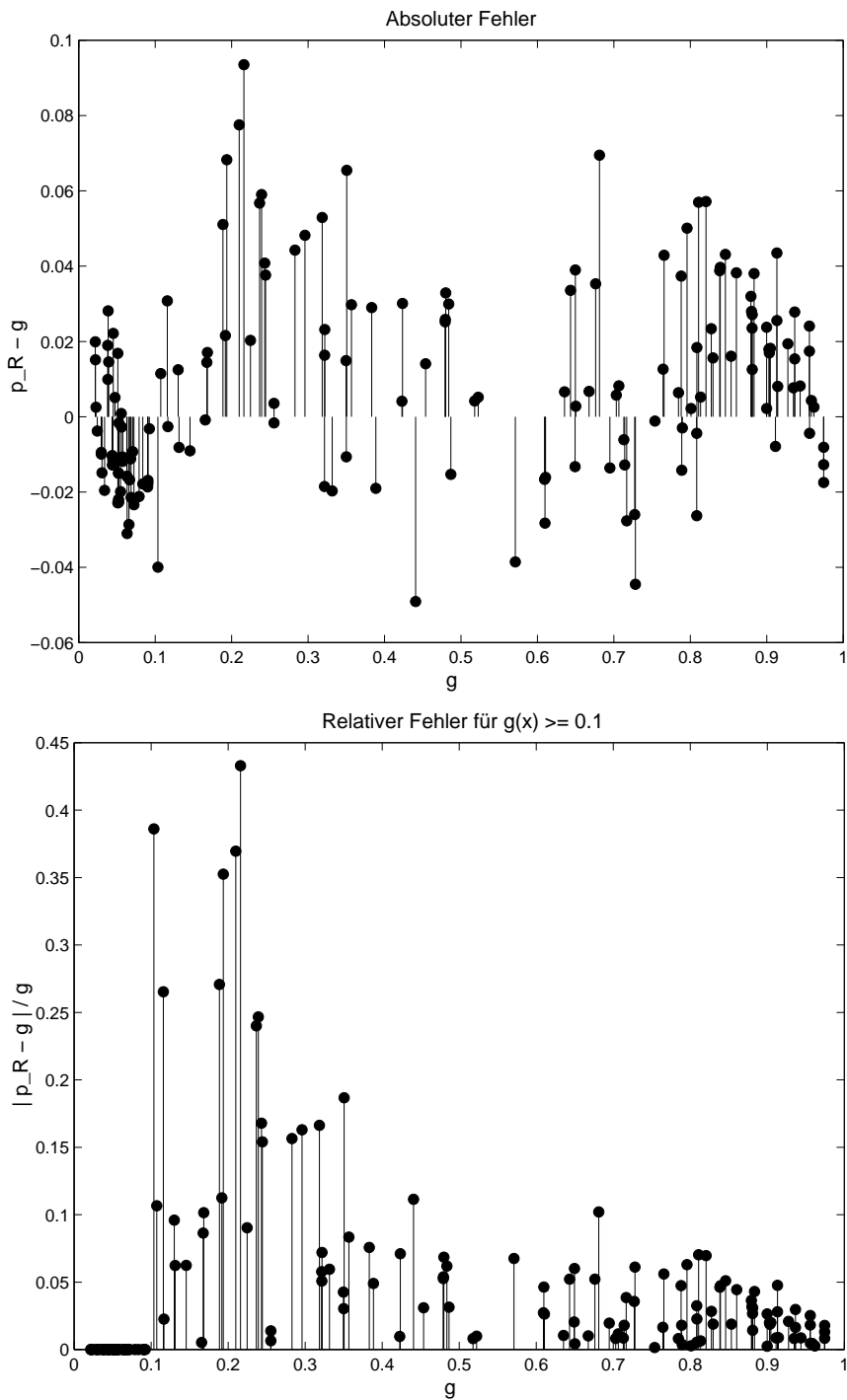


Abbildung 7: Absoluter und relativer Fehler der Näherung "RBF" an den Prüfknoten.

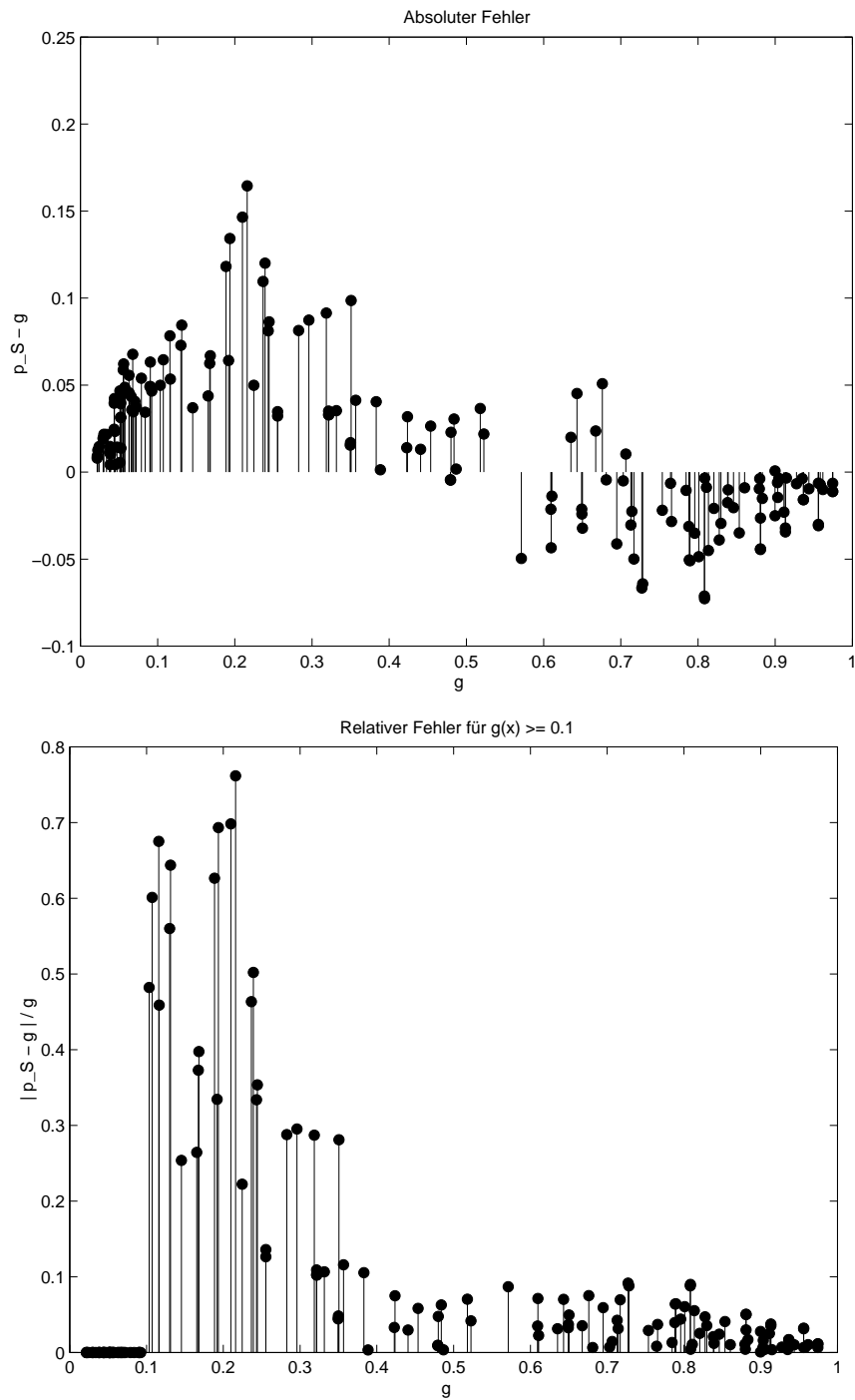


Abbildung 8: Absoluter und relativer Fehler des quintlinearen Splines an den Prüfknoten.

## Zusammenfassung

Bei numerischen Verfahren zur Untersuchung der Standsicherheit von Flussdeichen spielt die Berechnung der Druckfunktion eine entscheidende Rolle. Während Finite-Elemente-Verfahren heute noch zu aufwendig sind, um eine Variation der Deichparameter in angemessener Rechenzeit zu ermöglichen, lassen sich mit der Methode der kleinsten Quadrate mit geeigneten Nebenbedingungen multivariate Polynome konstruieren, welche zur praktischen Approximation der Druckfunktion geeignet sind.

Um die Gefahr eines Deichbruchs auszuschließen, ist dabei besonders darauf zu achten, dass der am Deich auftretende Druck durch die approximierende Funktion nicht unterschätzt wird. Ein konstanter Sicherheitszuschlag von 0,05 zur genauesten der in dieser Arbeit ermittelten Approximationen erscheint ausreichend, um für die Praxis verwertbare Näherungswerte der Druckfunktion zu erhalten.

## Literatur

- [1] Björck, Å., *Numerical methods for least squares problems*, SIAM, Philadelphia, 1996.
- [2] Eble, I., *Ein multivariates Approximationsproblem bei Druckuntersuchungen an Rhein-deichen*, Diplomarbeit, Universität Karlsruhe, 2000
- [3] Görtler, H., *Dimensionsanalyse*, Springer, Berlin, 1975.
- [4] Hämmerlin, G., Hoffmann, K., *Numerische Mathematik*, Springer, Berlin, 4. Auflage, 1994.
- [5] Kärcher, K., Gottheil, K., u.a., *Zur Standsicherheit, Auftriebssicherheit und Erosionsstabilität von Flußdeichen*, *Geotechnik* **20**, Nr. 4, 276–280, 1997.
- [6] Schaback, R., *Reconstruction of multivariate functions from scattered data*, Manuskript, erhältlich über <http://www.num.math.uni-goettingen.de/schaback/research/group.html>.
- [7] Schaback, R., Wendland, H., *Characterization and construction of radial basis functions*, Preprint, Universität Göttingen, 2000.
- [8] Weinrich, M., *Charakterisierung von Funktionenräumen bei der Interpolation mit radialen Basisfunktionen*, Dissertation, Universität Göttingen, 1994.

**Anschrift der Verfasser:**

cand. math. Ingo Eble  
Dr. Markus Neher

Institut für Angewandte Mathematik  
Universität Karlsruhe  
76128 Karlsruhe

Bundesrepublik Deutschland